

LE POINT SUR...  
CONCISE REVIEW PAPER

## Transfert de rayonnement : méthodes itératives

Frédéric PALETOU

Observatoire de la Côte d'Azur, département Cassini (CNRS/UMR 6529), BP 4229, 06304 Nice cedex 4, France  
Courriel : [paletou@obs-nice.fr](mailto:paletou@obs-nice.fr)

(Reçu le 15 mai 2000, accepté après révision le 19 février 2001)

---

**Résumé.** Dans cet article, je décrirai diverses méthodes permettant de résoudre des problèmes de transfert de rayonnement considérant successivement l'atome à deux niveaux, puis les effets de redistribution partielle en fréquence, l'atome à plusieurs niveaux et, enfin, la polarisation du rayonnement. La méthode numérique dite ALI (pour Accelerated Lambda-Iteration) est le « dénominateur commun » à toutes ces méthodes. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**transfert de rayonnement / formation des raies spectrales / méthodes numériques**

### *Radiation transfer with iterative methods*

**Abstract.** We review several numerical approaches which have been developed during the last 10 years in order to perform more realistic radiative modelling of solar and stellar atmospheres. However, we shall restrict ourselves to the same 'family' of method, the ones which are derived from the so-called Accelerated Lambda-Iteration technique. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**radiation transfer / spectral line formation / numerical methods**

---

### *Abridged English version*

The most recent developments in the field of radiative transfer theory, when applied to astrophysical problems, are largely dependent on iterative numerical methods based on the so-called approximate or accelerated  $A$ -iteration [27].

In astrophysics it is necessary to make routine calculations with detailed radiative models for stellar atmospheres or other celestial objects. Those calculations need to use realistic geometries and often involve large amounts of data obtained from complex atomic models. The latter point refers to the large multilevel models which are needed when local thermodynamic equilibrium (LTE) can not be assumed. A non-LTE calculation means that the radiative transfer equation and statistical equilibrium equations have to be solved simultaneously and self-consistently [1]. Sometimes it is necessary to include hundreds of spectral lines. In addition we also may have to consider non-isotropic scattering and the effects of partial frequency redistribution of photons [39,52].

In Section 2, we shall describe the principle of the ALI method. It is basically an operator perturbation method similar to the well-known Jacobi method in mathematics [21,22]. The primary idea is to derive

---

Rédigée à l'invitation du COMITÉ DE LECTURE.

a perturbation scheme by introducing an approximation for the  $A$  operator in the formal solution of the radiative transfer equation (equation (4)). Furthermore, this convergent scheme (equation (8)) can be improved by ‘numerical acceleration’ based on extrapolation, once several successive solutions have been computed [25]. Illustrative examples are given in *figures 1* and *2* for the two-level atom case in a one-dimensional plane parallel, isothermal atmosphere. It was demonstrated by Olson et al. [23] that the choice of an approximate operator which is just the exact diagonal of the full operator leads to the optimal iterative scheme. This choice of a diagonal approximate operator is also particularly well-suited for radiative modelling in more than one dimension [46,59,60].

The numerical treatment of the effects of partial frequency redistribution (PRD) is described in Section 3. PRD plays a significant role in the formation of resonance lines formed in rarefied atmospheres. This became evident in the 1970s when detailed models of the solar chromosphere were being developed [29–31]. Taking PRD into account means that one has to deal with the frequency dependence of the line source function and this increases the size of the numerical problem significantly. Convergence in the far wings of lines, where scattering tends to be coherent, can be a problem for slab atmospheres of large optical thickness. A fast and efficient method is described in some detail [15,33].

Most often, realistic transfer calculations require multilevel atomic models. The basic ingredients of multilevel ALI are given on Section 4. for the simplest but useful case of complete frequency redistribution [16,17]. The second part of this section is devoted to the generalization of the numerical scheme for the case of partial redistribution in frequency [18]. Multilevel ALI can also be used in more than one dimension. For example, some applications relating to the formation of the  $L_y \alpha$  and  $L_y \beta$  lines of hydrogen in 2D solar prominence models have been made [49,50].

In Section 5 we show how the ALI technique can be extended to polarized radiative transfer. Hereafter, we shall only consider the case of resonance polarization for which the absorption coefficient in the transfer equation remains scalar. The presentation of the polarized radiation ALI (PALI) method makes use of a Rayleigh phase matrix which describes properly, in a classical approach, resonance scattering in the absence of a magnetic field. In that case, we shall only compute the Stokes parameters  $I$  and  $Q$  [19]. However, it is rather straightforward to generalize the PALI method in order to include the Hanle effect with both complete and partial redistribution in frequency [56,58].

We finally conclude by summarizing the various possibilities offered by the ‘ALI-class’ methods for the numerical radiation transfer problem.

---

## 1. Introduction

Durant ces dernières années, les méthodes itératives du type ALI (c’est-à-dire *Accelerated Lambda-Iteration*) ont été largement optimisées et adaptées à des problèmes de transfert de rayonnement de diverse nature. Cet article se propose de passer en revue les développements des méthodes itératives les plus importants effectués durant ces 10 dernières années. L’application de ces techniques permet d’aborder une modélisation radiative plus réaliste dans de nombreux cas rencontrés en astrophysique.

Le code de calcul MULTI [1], très largement utilisé dans la communauté astrophysique pour traiter numériquement des problèmes de transfert de rayonnement hors d’équilibre thermodynamique local (hors-ETL), est basé sur une méthode itérative développée à partir de l’introduction d’un opérateur approché [2,3]. MULTI sert aussi de base pour des simulations d’hydrodynamique radiative hors-ETL visant à l’étude de la dynamique de la chromosphère solaire [4]. Dans le cas des étoiles de type solaire, l’on peut citer par exemple l’étude de la formation hors-ETL du doublet de résonance à 670.6 nm du Li I en présence d’inhomogénéités de surface [5]. Ce doublet est couramment utilisé pour la détermination de l’abondance du Lithium dans les atmosphères stellaires. La modélisation radiative effectuée pour cette étude a nécessité des calculs en géométrie 2D avec un modèle de l’atome de lithium à plusieurs niveaux. Le développement

récent de ces méthodes itératives rapides pour le transfert de rayonnement hors-ETL a également permis de faire largement progresser le domaine de l'inversion des profils observés par spectroscopie voire, plus généralement, par spectropolarimétrie [6,7]. Une application à l'évolution temporelle de profils de polarisation circulaire dits anormaux observés dans l'ombre des taches solaires a permis de valider un modèle d'oscillations chromosphériques dans une atmosphère magnétisée [8].

La mise en œuvre de la méthode ALI en géométrie sphérique [9] permet désormais de nombreuses applications concernant la modélisation d'étoiles de type O et B, ainsi que, par exemple, l'étude des effets de sphéricité de l'atmosphère sur la formation des raies spectrales de l'hydrogène dans les naines blanches [10]. L'approche ALI a également été adaptée et appliquée avec succès dans le cas d'atmosphères en expansion comme cela se rencontre pour les étoiles de type Wolf-Rayet [11], ou encore pour l'étude de la formation de raies spectrales dans les supernovae [12]. Plus récemment, la méthode ALI a été adaptée à la modélisation des inversions de populations responsables des masers H<sub>2</sub>O [13]. Ceci s'applique en particulier au diagnostic des raies moléculaires émises dans les régions de formation d'étoiles, ou formées dans les enveloppes circumstellaires internes des étoiles tardives. Un dernier exemple démontrant l'étendue des applications de la méthode ALI et de ses adaptations, concerne la modélisation multi-dimensionnelle en géométrie sphérique du milieu circumstellaire [14]. L'algorithme proposé ici est plus particulièrement appliqué à la diffusion par des grains, ainsi qu'à la formation hors-ETL de raies moléculaires de HCO<sup>+</sup> dans un nuage protostellaire.

Dans la Section 2, j'exposerai le principe de la méthode ALI dans le cas de l'atome à deux niveaux (sans continu) et avec redistribution complète en fréquence (ou CRD). Ensuite, j'aborderai le traitement des effets de redistribution *partielle* en fréquence (ou PRD) en développant une méthode itérative très robuste [15]. À la Section 4, il sera question de l'atome à plusieurs niveaux, aussi bien en CRD (méthode MALI ; [16,17]) qu'en PRD [18]. Enfin j'exposerai les particularités de la méthode PALI [19] qui s'applique au transfert de rayonnement polarisé (polarisation par résonance et effet Hanle en présence de champ magnétique).

## 2. Principe de base de la méthode ALI

En géométrie 1D plan-parallèle, avec redistribution complète en fréquence (CRD), pour un modèle d'atome à deux niveaux, on peut écrire l'équation de transfert (ETR) comme :

$$\mu \frac{\partial I}{\partial \tau}(\tau, x, \mu) = \phi(x) [I(\tau, x, \mu) - S(\tau)] \quad (1)$$

où, selon l'usage,  $I$  représente l'intensité spécifique,  $S$  la fonction source (dans ce cas particulier, indépendante de la fréquence et de la direction),  $\phi$  le profil d'absorption,  $\tau$  la profondeur optique,  $\mu$  le cosinus de l'angle que fait la normale à l'atmosphère avec la ligne de visée et  $x$  est la « fréquence réduite » ;  $x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D$  où  $\nu_0$  est la fréquence du centre de la raie, et  $\Delta\nu_D$  représente la largeur Doppler.

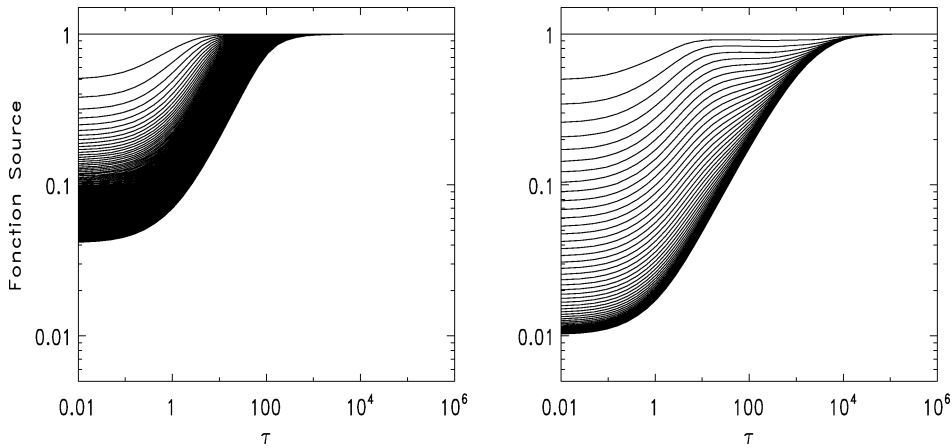
### 2.1. A-itération simple

La fonction source s'exprime alors comme :

$$S(\tau) = (1 - \varepsilon)\bar{J}(\tau) + \varepsilon B(\tau) \quad (2)$$

où  $B$  est la fonction de Planck (qui dépendra aussi, plus généralement du profil de température dans l'atmosphère),  $\varepsilon$  (qui est aussi une fonction de  $\tau$  dans une atmosphère réaliste) est la probabilité de destruction collisionnelle et  $\bar{J}$  est l'intensité moyenne (ou intégrale de diffusion) définie par :

$$\bar{J}(\tau) = \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) I(\tau, \mu, x) dx \quad (3)$$



**Figure 1.** Estimations successives de la fonction source de raie respectivement pour (gauche) la  $\Lambda$ -itération et (droite) la méthode ALI de Olson et al. [23] avec opérateur approché diagonal. Dans chacun des cas, 200 itérations sont représentées. On constate bien la pseudo-convergence de la  $\Lambda$ -itération et la bonne convergence d’ALI.

**Figure 1.** History of the source function for (left) simple  $\Lambda$ -iteration and (right) ALI with a diagonal approximate operator.

La « solution formelle » de l’ETR, i.e., la solution pour une fonction source donnée, s’écrit :

$$\bar{J}(\tau) = \Lambda S(\tau) \tag{4}$$

Lorsque l’on cherche à résoudre le problème de transfert de rayonnement de façon itérative, la première idée qui vient à l’esprit en combinant les équations (2) et (4), c’est d’utiliser un schéma de la forme (en omettant d’explicitier les dépendances avec la profondeur optique) :

$$S = (1 - \varepsilon)\Lambda S^\dagger + \varepsilon B \tag{5}$$

où la quantité  $S^\dagger$  a été calculée à l’itération précédente.

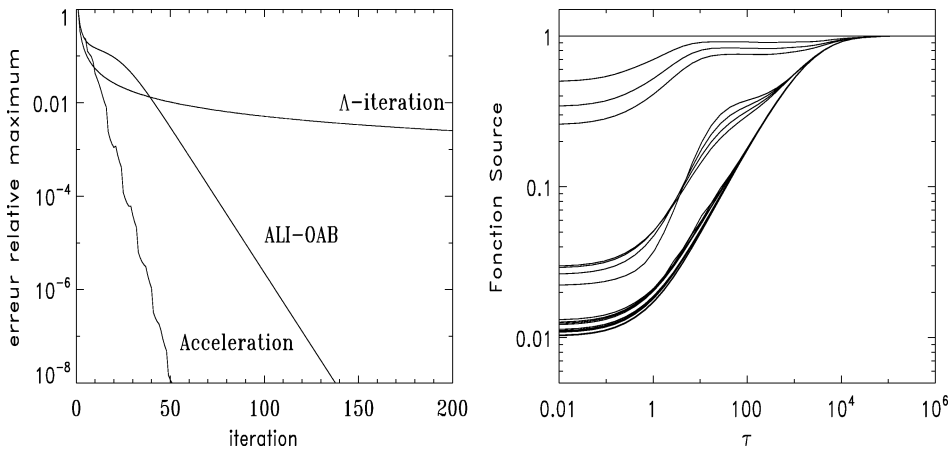
Ce schéma itératif est appelé «  $\Lambda$ -itération ». Il est bien connu que cette méthode est très lentement convergente [20]. Ceci est illustré par la *figure 1* (gauche) qui montre l’évolution de la fonction source pour 200 itérations (couche 1D isotherme semi-infinie,  $\varepsilon = 10^{-4}$ , valeur initiale  $S = B$ ,  $B = 1$ , profil Doppler). Bien qu’un nombre important d’itérations ait été effectué, la valeur de surface, dans ce cas  $\sqrt{\varepsilon}B$ , n’est, par exemple, pas atteinte. Pratiquement, la  $\Lambda$ -itération est donc à proscrire pour toute modélisation radiative réaliste (sauf peut-être pour des raies ou continus de faible épaisseur optique).

## 2.2. Introduction d’un opérateur approché : ALI

La méthode ALI utilise une décomposition de l’opérateur  $\Lambda$ . Quand l’opérateur approché est la diagonale de l’opérateur complet, cette méthode est généralement appelée méthode de Jacobi en mathématiques. L’utilisation d’un opérateur approché a été initialement proposée dans le domaine du transfert de rayonnement par Cannon [21,22].

On va alors considérer :

$$\begin{cases} \Lambda = \Lambda^* + (\Lambda - \Lambda^*) \\ S = S^\dagger + \delta S \end{cases} \tag{6}$$



**Figure 2.** A gauche, l’erreur relative maximale sur la fonction source en fonction du nombre d’itérations pour la  $\Lambda$ -itération, ALI-OAB avec un opérateur approché diagonal, et ALI-OAB avec accélération de la convergence. A droite, l’évolution de la fonction source pour ALI-OAB avec accélération de la convergence. Une accélération est faite tous les 4 itérés.

**Figure 2.** (Left) Maximum relative error on the source function vs. number of iterations with simple  $\Lambda$ -iteration, ALI-OAB and, ALI-OAB and acceleration of convergence; (right) history of the source function in the latter case, with one acceleration step every 4 iterations.

et introduire ces décompositions dans :

$$S = (1 - \varepsilon)AS + \varepsilon B \tag{7}$$

Ceci mène alors à un schéma itératif de la forme :

$$S = [1 - (1 - \varepsilon)\Lambda^*]^{-1} \{ (1 - \varepsilon)(\Lambda - \Lambda^*)S^\dagger + \varepsilon B \} \tag{8}$$

Bien entendu, la méthode optimale sera celle qui assurera le meilleur rapport entre son taux de convergence et son « coût numérique » par itération ; autrement dit, on choisira un opérateur  $[1 - (1 - \varepsilon)\Lambda^*]$  facile à inverser tout en garantissant la bonne convergence de la méthode.

En utilisant des arguments mathématiques sur les opérateurs et leurs valeurs propres, Olson et al. [23] ont montré que la méthode optimale consiste à choisir pour opérateur approché  $\Lambda^*$  la *diagonale exacte* de l’opérateur complet  $\Lambda$ . Il n’est d’ailleurs pas nécessaire de calculer ce dernier pour former  $\Lambda^*$ . L’inversion de  $[1 - (1 - \varepsilon)\Lambda^*]$  se résumera donc à une division *scalaire* à chaque profondeur optique dans la couche.

On peut voir sur la *figure 1* (droite) l’évolution de la fonction source avec la méthode ALI, pour le même modèle que celui décrit précédemment. La solution — connue analytiquement dans ce cas — est bien calculée en quelques dizaines d’itérations.

### 2.3. Quelques mots sur l’accélération de la convergence

Le taux de convergence de la méthode ALI peut être augmenté de façon significative en utilisant des méthodes d’accélération de la convergence. Le lecteur trouvera de plus amples informations sur ce thème dans deux articles de Auer [24,25]. Ci-dessous, je n’exposerai que le principe de la méthode dite de Ng [26].

Considérons  $(m + 1)$  itérés succesifs de la fonction source :

$$S^+ = \left( 1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i \right) S^{(n)} + \sum_{i=1}^m \alpha_i S^{(n-i)} \tag{9}$$

où l'«exposant» sur  $S$  représente le pas d'itération, et les  $\{\alpha\}$  des quantités à déterminer. De la même façon, on peut écrire  $S^-$  à l'itération précédente :

$$S^- = \left(1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i\right) S^{(n-1)} + \sum_{i=1}^m \alpha_i S^{(n-i-1)} \quad (10)$$

Pour déterminer les coefficients  $\{\alpha\}$  de la combinaison linéaire, on va alors minimiser :

$$\Delta = \sum_{j=1}^l w_j [S_j^+ - S_j^-]^2 \quad (11)$$

La somme sur  $j$  est effectuée sur la longueur des vecteurs  $S$  (ici, la longueur correspond au nombre de points de la grille en profondeur optique). Pour les poids  $\{w\}$ , l'on peut choisir  $w_j = S_j^{-1}$  comme préconisé dans [23].

L'effet de l'accélération de la convergence est montré sur la *figure 2*. À gauche sont portées les erreurs relatives sur la fonction source en fonction du nombre d'itérations pour, respectivement, la  $\Lambda$ -itération, ALI-OAB seule, puis ALI-OAB avec accélération de la convergence. À droite est représenté l'évolution de la fonction source en fonction de  $\tau$  quand on applique l'accélération de la convergence ; dans ce dernier cas, on effectue une accélération toutes les quatre itérations comme cela peut se remarquer assez distinctement sur la figure. L'accélération de la convergence permet ici de gagner un bon facteur 2 (en nombre d'itérations et en temps de calcul) pour atteindre, par exemple, une erreur relative de  $10^{-6}$ .

Pour clore ce paragraphe, bien loin de se vouloir exhaustif, je renvoie le lecteur vers les deux excellents articles de revue de Hubeny [27] et Rybicki [28] sur les méthodes itératives utilisées dans le domaine du transfert de rayonnement pour l'astrophysique.

### 3. La redistribution partielle en fréquence

C'est dans les années 70, et à travers de la modélisation radiative de la chromosphère solaire que l'importance des effets de redistribution partielle en fréquence (ou PRD) a été réalisée. Les premiers travaux concernaient la formation de la raie Ly  $\alpha$  de H I, des raies de résonance  $h$  et  $k$  de Mg II puis, H et K de Ca II [29–31]. Plus tard, l'étude de la formation de la raie Ly  $\alpha$  de H I dans les protubérances solaires a également bien mis en avant l'importance de la PRD sur les profils calculés — alors en très bon accord avec les observations — ainsi que dans la détermination plus précise de l'état d'excitation et d'ionisation de l'atmosphère considérée [32].

Après avoir rappelé quelques généralités sur ce qui sous-tend la redistribution partielle en fréquence, je décrirai une méthode itérative (CRDCS pour CRD (in the Doppler core) and Coherent Scattering (in the wings) approximation ; cf. [15,33]) pour traiter les effets de PRD pour un modèle d'atome à deux niveaux.

#### 3.1. Généralités

En plus des références données plus loin, on ne peut que recommander au lecteur de se reporter aux deux articles de revue de Hubeny [34] et Frisch [35] ainsi qu'aux ouvrages de Jefferies [36], Mihalas [37] et Oxenius [38] pour une vision plus détaillée de la physique et des effets de redistribution partielle en fréquence.

Hummer [39] a étudié systématiquement quatre mécanismes de redistribution partielle en fréquence physiquement réalistes. Il a alors défini autant de fonctions de redistribution couplant entre elles les fréquences avant et après diffusion (ici, une absorption suivie d'une émission), pour décrire mathématiquement chacun des cas. On mentionnera par la suite les fonctions  $R_{\text{III}}$  et  $R_{\text{II}}$  dans la dénomination de Hummer, qui s'appliquent respectivement aux deux cas suivants.

En effet, deux mécanismes extrêmes peuvent être utilisés pour décrire la diffusion d'un photon entre deux niveaux d'énergie d'un atome ou d'un ion. Lorsque l'atmosphère est suffisamment dense et donc lorsque les collisions entre particules sont « nombreuses », un changement de fréquence se produira au cours de la diffusion et nous parlerons alors de « redistribution complète en fréquence ». Pratiquement, cela revient à dire que les profils d'émission et d'absorption des photons sont identiques. Dans le référentiel de l'observateur, la redistribution sera alors décrite par la fonction  $R_{III}$  (avec diffusion isotrope).

Par contre, considérons maintenant une atmosphère très diluée pour laquelle les taux de collisions sont négligeables par rapport aux taux radiatifs dans les équations de l'équilibre statistique. À la limite, une absorption suivie d'une re-émission sans changement de fréquence dans le référentiel de l'atome décrira bien le mécanisme de diffusion (cohérente ou plutôt monochromatique) des photons dans une raie. En plus de la cohérence va s'ajouter de la « redistribution Doppler » quand l'on va considérer les mouvements des atomes ou ions émetteurs en se plaçant dans le référentiel de l'observateur; dans les ailes de la raie, la redistribution en fréquence sera alors « quasi-cohérente ». Dans ce cas, c'est la fonction  $R_{II}$  que l'on utilisera pour le transfert de rayonnement.

Dans une atmosphère réaliste, on aura plutôt affaire à un processus de redistribution en fréquence qui sera une combinaison linéaire des deux mécanismes extrêmes évoqués plus haut. La représentation mathématique (issue de l'approche quantique) de cette redistribution dite partielle sera alors du type (cf. [40]) :

$$R(\nu, \nu') = \gamma R_{II}(\nu, \nu') + (1 - \gamma) R_{III}(\nu, \nu') \tag{12}$$

où le paramètre  $\gamma$  est appelé rapport de branchement; il dépend des taux de collisions élastiques, inélastiques ainsi que du taux de désexcitation radiative par émission spontanée [20].

Pratiquement, on pourra utiliser  $R_{III}(\nu, \nu') \approx \phi(\nu)\phi(\nu')$  pour la redistribution complète en fréquence [41,42]. Dans la suite, nous nous placerons dans le cas particulier, et numériquement difficile, où  $\gamma = 1$  bien que la méthode décrite plus loin soit aussi parfaitement adaptée au cas de  $\gamma$  quelconque et variable dans l'atmosphère.

### 3.2. La méthode CRDCS

Dans la suite, nous utiliserons la fréquence réduite  $x$ , plutôt que  $\nu$ , les quantités primées se rapportant à l'état du photon incident avant diffusion, et nous allègerons les écritures en omettant volontairement toute référence à la dépendance en profondeur. En PRD, l'intégrale de diffusion s'écrit maintenant :

$$\bar{J}_x = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{R_{xx'}}{\phi_x} \right] I_{x'\mu} dx' \tag{13}$$

et la solution formelle :

$$\bar{J}_x = L_x[S_x] \tag{14}$$

L'argument principal de la méthode CRDCS est que les propriétés de  $R_{II}$  justifient physiquement l'introduction d'un opérateur approché de la forme :

$$L_x^*[\ ] = (1 - \alpha_x) \int_{\text{noyau}} \phi_{x'} \Lambda_{x'}[\ ] dx' + \alpha_x \int_{\text{ailes}} \delta(x - x') \Lambda_{x'}[\ ] dx' \tag{15}$$

où  $\Lambda_x$  est l'opérateur monochromatique donnant l'intensité moyennée sur les directions à partir d'une fonction source connue :

$$J_x = \Lambda_x[S_x] \tag{16}$$

On prendra aussi bien soin de renormaliser les poids d'intégration utilisés pour le calcul du 1<sup>er</sup> terme de droite de l'équation (15).

Les coefficients  $\{\alpha_x\}$  sont les éléments diagonaux de la matrice de redistribution  $\hat{g}$  dans les ailes de la raie, et zéro ailleurs. Ainsi, l'opérateur approché tiendra bien compte de la transition du régime CRD dans le noyau Doppler vers le régime de diffusion quasi-cohérente dans les ailes.  $\hat{g}$  est, en d'autres termes, la matrice des poids d'intégration en fréquence utilisés pour le calcul de l'intégrale de diffusion sous forme discrète :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{R_{xx'}}{\phi_x} \right] J_{x'} dx' = \sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} g_{ij} J_j \quad (17)$$

L'article de Adams et al. [43] décrit en détails une méthode de calcul de la matrice de redistribution  $\hat{g}_{\text{II}}$ . On trouvera aussi dans [44] une méthode rapide d'évaluation de la fonction  $R_{\text{II}}$ .

Nous allons maintenant considérer les perturbations suivantes :

$$\begin{cases} S_x^{(n+1)} = S_x^{(n)} + \delta S_x^{(n)} \\ L_x[\ ] = L_x^*[\ ] + (L_x - L_x^*)[\ ] \end{cases} \quad (18)$$

Les incréments de fonction source doivent alors satisfaire à la relation :

$$\delta S_x^{(n)} - (1 - \varepsilon) L_x^*[\delta S_x^{(n)}] = r_x^{(n)} \quad (19)$$

où les résidus  $r_x^{(n)}$  sont définis comme :

$$r_x^{(n)} = (1 - \varepsilon) L_x[S_x^{(n)}] + S_x^* - S_x^{(n)} \quad (20)$$

À partir de maintenant, nous allons traiter de façon différente le noyau Doppler et les ailes de la raie comme le suggèrent les propriétés de la fonction de redistribution  $R_{\text{II}}$ .

### 3.2.1. Dans le noyau Doppler

Au voisinage du centre de la raie, i.e. pour des fréquences  $x \leq x_c$ , les «écarts à la CRD» seront certainement faibles et l'approximation  $R_{xx'} \approx \phi_x \phi_{x'}$  sera satisfaisante. Pratiquement, on utilisera une fréquence de coupure  $x_c$  de l'ordre de 3 à 4 largeurs Doppler.

Compte tenu de cette approximation, les incréments de fonction source devront alors satisfaire à l'équation :

$$\delta S_x^{(n)} - (1 - \varepsilon) \int_{\text{noyau}} \phi_x A_x[\delta S_x^{(n)}] dx = r_x^{(n)} \quad (21)$$

qui peut être résolue avec la méthode déjà utilisée par Scharmer [45] et Auer & Paletou [46]. Cependant, dans ces deux dernières études, l'intégration en fréquence était effectuée sur tout le profil de raie et non pas uniquement sur le seul domaine du noyau Doppler ; ceci n'était d'ailleurs pas satisfaisant dans les ailes lointaines de la raie [15].

Les incréments de fonction source sont alors donnés par la somme d'un résidu dépendant de la fréquence et d'un terme indépendant de la fréquence,  $\Delta T$ , définie comme :

$$\Delta T = (1 - \varepsilon) \int_{\text{noyau}} \phi_x A_x[\delta S_x^{(n)}] dx \quad (22)$$

En intégrant l'équation (21) sur les fréquences du noyau, nous pouvons alors écrire une nouvelle équation permettant de déterminer  $\Delta T$ . Ensuite, en incorporant  $A_x^*$  et en utilisant l'approximation  $A_x[\delta S] \approx A_x^*[\delta S]$ ,



la correction  $\Delta T$  sera calculée à chaque point grille de la façon suivante :

$$\Delta T = [1 - (1 - \varepsilon)\bar{\Lambda}^*]^{-1} \left[ (1 - \varepsilon) \int_{\text{noyau}} \phi_x A_x [r_x^{(n)}] dx \right] \quad (23)$$

où  $\bar{\Lambda}^*$  est l'opérateur approché pondéré par le profil d'absorption et intégré sur le domaine de fréquence du noyau. Finalement, les incréments de fonction source sont donnés par :

$$\delta S_x^{(n)} = \Delta T + r_x^{(n)} \quad (24)$$

### 3.2.2. Dans les ailes de la raie

La diffusion devient alors quasi-cohérente et les  $\{\alpha_x\}$  permettent une transition douce et continue entre les deux domaines noyau/ailes. Le grand avantage de la méthode CRDCS et en particulier de l'approximation de diffusion cohérente dans les ailes, c'est que les incréments de fonction source sont facilement calculés comme :

$$\delta S_x^{(n)} = [1 - \alpha_x(1 - \varepsilon)A_x^*]^{-1} [r_x^{(n)} + (1 - \alpha_x)\Delta T] \quad (25)$$

une fois que les  $\Delta T$  ont été évalués. On trouvera tous les tests de la validation numérique de la méthode CRDCS [15]. Cette méthode a également été mise en œuvre dans un code de transfert de rayonnement polarisé scalaire (cf. la Section 5).

## 4. L'atome à plusieurs niveaux

On va s'intéresser maintenant à la résolution couplée de l'équation de transfert pour plusieurs transitions (libres ou liées) avec les équations de l'équilibre statistique (EES) pour un atome ou ion donné. Nous décrivons ci-dessous la méthode MALI pour *Multilevel  $\Lambda$ -iteration* [16,17]. De façon générale, la fonction source de raie va s'écrire en fonction des populations atomiques comme :

$$S_{ij}(\nu) = \frac{n_i A_{ij} \psi_\nu}{n_j B_{ji} \phi_\nu - n_i B_{ij} \psi_\nu} \quad (26)$$

En CRD, on a  $\phi_\nu \equiv \psi_\nu$  et par conséquent une fonction source de raie indépendante de la fréquence. Introduisons maintenant l'opérateur approché  $\Lambda^*$  dans les EES en utilisant l'approximation :

$$I_{\nu\mu} \approx \Lambda_{\nu\mu}^* [S_{\nu\mu}] + (\Lambda_{\nu\mu} - \Lambda_{\nu\mu}^*) [S_{\nu\mu}^\dagger] \quad (27)$$

Pour chaque niveau lié, l'intégrale de diffusion  $\bar{J}$  qui intervient dans les EES va alors se décomposer en :

$$\begin{cases} \bar{J}_{ij} \approx \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \phi_\nu \Lambda_{\nu\mu}^* [S_{\nu\mu}] d\nu + \bar{J}_{ij}^{\text{eff}} \\ \bar{J}_{ij}^{\text{eff}} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \phi_\nu \Lambda_{\nu\mu} [S_{\nu\mu}^\dagger] d\nu - \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \phi_\nu \Lambda_{\nu\mu}^* [S_{\nu\mu}^\dagger] d\nu \end{cases} \quad (28)$$

où  $\bar{J}^{\text{eff}}$  ne dépend que des quantités calculées à l'itération précédente. On définit alors :

$$\bar{\Lambda}_{ij}^* = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \phi_\nu \Lambda_{\nu\mu}^* d\nu \quad (29)$$

En substituant l'expression de la fonction source dans la nouvelle écriture de  $\bar{J}_{ij}$  donnée en (28), on peut réécrire le taux radiatif net pour la transition  $i \leftrightarrow j$  comme :

$$(n_j B_{ji} - n_i B_{ij}) \bar{J}_{ij} \approx n_i A_{ij} \bar{\Lambda}_{ij}^* + (n_j B_{ji} - n_i B_{ij}) \bar{J}_{ij}^{\text{eff}} \quad (30)$$

Ainsi, à chaque itération on va résoudre les EES *préconditionnées* suivantes :

$$\begin{aligned} & \sum_{j < i} [n_i A_{ij} (1 - \bar{\Lambda}_{ij}^*) - (n_j B_{ji} - n_i B_{ij}) \bar{J}_{ij}^{\text{eff}}] \\ & - \sum_{j > i} [n_j A_{ji} (1 - \bar{\Lambda}_{ij}^*) - (n_i B_{ij} - n_j B_{ji}) \bar{J}_{ij}^{\text{eff}}] + \sum_j (n_i C_{ij} - n_j C_{ji}) = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

En PRD, en revanche, la fonction source dépend de la fréquence ; le rapport entre profil d'émission et profil d'absorption a été donné par Hubeny [47] (en PRD « standard » i.e., on ne considère pas le cas possible d'une absorption suivie d'une re-émission dans une *autre* raie ; ce dernier cas dit de *cross-redistribution* a été traité par ailleurs [48]) :

$$\rho_\nu = \frac{\psi_\nu}{\phi_\nu} = 1 + \frac{n_l B_{lu}}{n_u P_u} \left[ \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int R(\nu, \nu') \phi_\nu^{-1} I_{\nu'\mu} d\nu' - \bar{J} \right] \quad (32)$$

$P_u$  est la somme de tous les taux, radiatifs et collisionnels, qui vont contribuer à dépeupler le niveau supérieur  $u$ . On peut alors définir un nouvel opérateur approché [18] qui tient compte des effets de PRD pour une transition particulière  $u \leftrightarrow l$  :

$$\check{\Lambda}_{ul}^* = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \phi_\nu \Lambda_{\nu\mu}^* \left[ \frac{(n_l^\dagger B_{lu} - n_u^\dagger B_{ul}) \rho_\nu^\dagger}{n_l^\dagger B_{lu} - n_u^\dagger B_{ul} \rho_\nu^\dagger} \right] d\nu \quad (33)$$

Enfin, compte tenu de l'approximation des champs (de rayonnement) faibles,  $n_u B_{ul} \psi_\nu \ll n_l B_{lu} \phi_\nu$ , on utilisera pratiquement :

$$\check{\Lambda}_{ul}^* = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \phi_\nu \Lambda_{\nu\mu}^* \rho_\nu^\dagger d\nu \quad (34)$$

$\check{\Lambda}^*$  va propager les effets de PRD dans les EES qui sont préconditionnées de la même façon que dans le cas CRD. Cette méthode a été utilisée pour la modélisation radiative 1D et 2D de protubérances solaires avec un atome d'hydrogène à cinq niveaux liés plus un continu et des effets de PRD pour les raies de résonance Ly  $\alpha$  et Ly  $\beta$  [49,50].

## 5. Rayonnement polarisé : polarisation de résonance

Nous nous limiterons ici à exposer le principe de la méthode PALI (*Polarized Accelerated  $\Lambda$ -iteration*) dans le cas le plus simple possible, i.e. la polarisation de résonance en l'absence de champ magnétique, en 1D et en CRD. La polarisation par résonance est l'analogie quantique de l'effet Rayleigh [51].

Le champ de rayonnement peut être représenté, de façon générale comme un vecteur des paramètres de Stokes  $\vec{I} = (I, Q, U, V)^T$  [52].  $Q$  et  $U$  caractérisent la polarisation linéaire et  $V$  la polarisation circulaire du rayonnement. Or dans le cas auquel nous nous référons ici,  $\vec{I}$  peut se réduire aux deux seuls paramètres de Stokes  $I$  et  $Q$  (en effet,  $U$  est nul par symétrie axiale, et  $V$  peut être traité séparément puisque la matrice de phase ne le couple pas aux autres paramètres de Stokes). Alors que jusqu'à présent nous faisons une hypothèse implicite de diffusion isotrope, maintenant une matrice de phase non-isotrope,  $\hat{P}$ , décrivant le couplage entre *directions* incidente et émergente au cours d'une diffusion va apparaître dans l'expression

de l'intensité moyenne [52]. Pour un atome à deux niveaux dans une atmosphère 1D en CRD, on peut alors écrire la fonction source comme :

$$\vec{S}(\tau, \mu) = \frac{(1 - \varepsilon)}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \hat{P}(\mu, \mu') \vec{I}(\tau, x, \mu') dx + \vec{S}^* \quad (35)$$

La matrice de phase de Rayleigh peut se décomposer sous la forme suivante [53] :

$$\hat{P}(\mu, \mu') = \hat{A}(\mu) \hat{A}^T(\mu') \quad (36)$$

avec :

$$\hat{A}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{W_2}{8}}(1 - 3\mu^2) \\ 0 & \sqrt{\frac{W_2}{8}}3(1 - \mu^2) \end{pmatrix} \quad (37)$$

où  $W_2$  est le facteur de dépolarisation qui dépend du nombre quantique  $J$  de chaque niveau de la transition.

On peut alors généraliser la méthode ALI scalaire à des « fonctions sources » matricielles qui satisfont à une ETR formellement du même type que celle de (1) comme montré par Ivanov et ses collaborateurs [53, 54]. Ceci présente l'avantage de pouvoir travailler avec une intensité moyenne matricielle *indépendante* de la direction :

$$\hat{J}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \hat{A}^T(\mu) \hat{A}(\mu) \hat{I}(\tau, x, \mu) dx \quad (38)$$

Grâce à ce formalisme matriciel, il est alors possible de généraliser la méthode ALI scalaire [19]. L'opérateur approché est représenté par une matrice (2 × 2) où  $A_{11}$  décrit la propagation de l'intensité,  $A_{22}$  la propagation de la polarisation et les autres termes décrivent le couplage entre paramètres de Stokes.

Ainsi, de façon analogue au cas non-polarisé, les incréments de fonction source sont évalués comme suit :

$$\delta \hat{S}(\tau_i) = \hat{d}_{ii}^{-1} \{ (1 - \varepsilon) A \hat{S}^\dagger(\tau_i) - \hat{S}^\dagger(\tau_i) + \hat{S}^*(\tau_i) \} \quad (39)$$

où l'opérateur  $\hat{d}$  prend à chaque position  $\tau_i$  la forme suivante :

$$\hat{d}_{ii} = \begin{pmatrix} 1 - (1 - \varepsilon) A_{11}(i, i) & -(1 - \varepsilon) A_{12}(i, i) \\ -(1 - \varepsilon) A_{21}(i, i) & 1 - (1 - \varepsilon) A_{22}(i, i) \end{pmatrix} \quad (40)$$

où  $A_{\alpha\beta}(i, i)$  est la diagonale de  $A_{\alpha\beta}$  à chaque profondeur optique.

En utilisant un développement en série de Fourier de la dépendance azimutale du champ de rayonnement [55], on peut aussi généraliser la méthode PALI pour le cas d'une atmosphère magnétisée [56]. On va alors pouvoir traiter l'effet Hanle qui fait partie des moyens de diagnostic du champ magnétique au même titre que l'effet Zeeman [57]. On considèrera en plus le paramètre de Stokes  $U$  dans la mesure où l'effet Hanle se manifeste par une dépolarisation accompagnée d'une rotation du plan de polarisation.

Les effets de redistribution partielle en fréquence peuvent aussi être traités [33,58]. L'usage de la méthode PALI, et de la méthode des caractéristiques courtes pour la solution formelle de l'ETR [15,46,59] a permis des gains en temps de calcul et en usage mémoire très significatifs par rapport aux codes déjà existants.

## 6. Conclusion

La méthode ALI et ses déclinaisons pour l'atome à plusieurs niveaux, les effets de redistribution partielle en fréquence, ou la polarisation du rayonnement constitue donc une approche numérique très efficace

permettant de traiter des modèles radiatifs complexes, pour lesquels les applications astrophysiques sont nombreuses.

La méthode ALI–OAB, plus particulièrement, a aussi permis le passage à des géométries supérieures au 1D [46,61] pour des modèles radiatifs réalistes tenant compte de l'atome à plusieurs niveaux [18,60], des effets de redistribution partielle en fréquence et de la polarisation du rayonnement [62–64].

Trujillo Bueno & Fabiani Bendicho [65] ont également montré que le taux de convergence de la méthode ALI peut être encore surpassé par la méthode de Gauss–Seidel. Bien connue des mathématiciens, cette dernière méthode peut être adaptée au transfert de rayonnement sans qu'il soit nécessaire d'inverser la moindre matrice !

### Références bibliographiques

- [1] Carlsson M., A computer program for solving multilevel non-LTE radiative transfer problems in moving or static atmospheres, *Uppsala Astron. Obs. Rep.* 33 (1986) 1.
- [2] Scharmer G.B., Carlsson M., A new approach to multilevel non-LTE radiative transfer problems, *J. Comput. Phys.* 59 (1985) 56.
- [3] Scharmer G.B., Solutions to radiative transfer problems using approximate  $\Lambda$  operators, *Astrophys. J.* 249 (1981) 720.
- [4] Carlsson M., Stein R.F., Formation of solar Ca H and K bright grains, *Astrophys. J.* 481 (1997) 500.
- [5] Uitenbroek H., The effect of photospheric granulation on the determination of the lithium abundance in solar-type stars, *Astrophys. J.* 498 (1998) 427.
- [6] Socas-Navarro H., Ruiz Cobo B., Trujillo Bueno J., Non-LTE inversion of line profiles, *Astrophys. J.* 507 (1998) 470.
- [7] Socas-Navarro H., Trujillo Bueno J., Ruiz Cobo B., Non-LTE inversion of Stokes profiles induced by the Zeeman effect, *Astrophys. J.* 530 (2000) 977.
- [8] Socas-Navarro H., Trujillo Bueno J., Ruiz Cobo B., Anomalous polarization profiles in sunspots: possible origin of umbral flashes, *Science* 288 (2000) 1398.
- [9] Kubát J., Spherically symmetric model atmosphere using approximate  $\Lambda$  operators, *Astron. Astrophys.* 287 (1994) 179.
- [10] Kubát J., The sphericity effects in the NLTE model atmospheres of hot white dwarfs, *Astron. Astrophys.* 299 (1995) 803.
- [11] Hamman W.-R., Wessolowski U., Line formation in expanding atmospheres – The treatment of radiative equilibrium by approximate  $\Lambda$  operators, and its application to Wolf–Rayet stars, *Astron. Astrophys.* 227 (1990) 171.
- [12] Eastman R.G., Pinto P.A., Spectrum formation in supernovae – Numerical techniques, *Astrophys. J.* 412 (1993) 731.
- [13] Yates J.A., Field D., Gray M.D., Non-local radiative transfer for molecules: modelling population inversions in water masers, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 285 (1997) 303.
- [14] Dullemond C.P., Turolla R., An efficient algorithm for two-dimensional radiative transfer in axisymmetric circumstellar envelopes and disks, *Astron. Astrophys.* 360 (2000) 1187.
- [15] Paletou F., Auer L.H., A new approximate operator method for partial frequency redistribution problems, *Astron. Astrophys.* 297 (1995) 771.
- [16] Rybicki G.B., Hummer D.G., An accelerated  $\Lambda$ -iteration method for multilevel radiative transfer I. Non-overlapping lines with background continuum, *Astron. Astrophys.* 245 (1991) 171.
- [17] Rybicki G.B., Hummer D.G., An accelerated  $\Lambda$ -iteration method for multilevel radiative transfer II. Overlapping transitions with full continuum, *Astron. Astrophys.* 262 (1992) 209.
- [18] Paletou F., Two-dimensional multilevel radiative transfer with standard partial frequency redistribution in isolated solar atmospheric structures, *Astron. Astrophys.* 302 (1995) 587.
- [19] Faurobert–Scholl M., Nagendra K.N., Frisch H., An operator perturbation method for polarized line transfer I. Non-magnetic regime in 1D media, *Astron. Astrophys.* 322 (1997) 896.
- [20] Frisch H., Faurobert–Scholl M., in: Benest D., Froeschlé C. (Eds.), *Le Soleil, une Étoile et son Domaine*, Publications de l'OCA, 1990, p. 151.
- [21] Cannon C.J., Angular quadrature perturbations in radiative transfer theory, *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer* 13 (1973) 627.
- [22] Cannon C.J., Frequency quadrature perturbations in radiative transfer theory, *Astrophys. J.* 185 (1973) 621.

- [23] Olson G.L., Auer L.H., Buchler J.R., A rapidly convergent iterative solution of the non-LTE line radiation transfer problem, *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer* 35 (1986) 431.
- [24] Auer L.H., in: Kalkofen W. (Ed.), *Numerical Radiative Transfer*, Cambridge University Press, 1987, p. 101.
- [25] Auer L.H., Acceleration of convergence, in: Crivellari L., Hubeny I., Hummer D.G. (Eds.), *Stellar Atmospheres: Beyond Classical Models*, NATO ASI Serie, Kluwer, 1991, p. 9.
- [26] Ng K.C., Hypernetted chain solution for the classical one-component plasma up to  $T$  equals 7000, *J. Chem. Phys.* 61 (1974) 2680.
- [27] Hubeny I., in: Heber U., Jeffery C.S. (Eds.), *The Atmosphere of Early Type Stars*, Lecture Notes in Physics, Springer, 1992, p. 377.
- [28] Rybicki G.B., Recent advances in computational methods, in: Crivellari L., Hubeny I., Hummer D.G. (Eds.), *Stellar Atmospheres: Beyond Classical Models*, NATO ASI Serie, Kluwer, 1991, p. 1.
- [29] Milkey R.W., Mihalas D., Resonance line transfer with partial redistribution: a preliminary study of Lyman  $\alpha$  in the solar chromosphere, *Astrophys. J.* 185 (1973) 709.
- [30] Milkey R.W., Mihalas D., Resonance line transfer with partial redistribution II. The solar Mg II lines, *Astrophys. J.* 192 (1974) 769.
- [31] Shine R.A., Milkey R.W., Mihalas D., Resonance line transfer with partial redistribution III. The solar Ca II lines, *Astrophys. J.* 199 (1975) 724.
- [32] Heinzel P., Gouttebroze P., Vial J.-C., Formation of the hydrogen spectrum in quiescent prominences – One-dimensional models with standard partial redistribution, *Astron. Astrophys.* 183 (1987) 351.
- [33] Paletou F., Faurobert-Scholl M., An operator perturbation method for polarized line transfer II. Resonance polarization with partial frequency redistribution effects, *Astron. Astrophys.* 328 (1997) 343.
- [34] Hubeny I., in: Beckman J.E., Crivellari L. (Eds.), *Progress in Stellar Spectral Line Formation Theory*, Reidel, 1984, p. 27.
- [35] Frisch H., in: Chmielewsky Y., Lanz T. (Eds.), *Radiation in Moving Gaseous Media*, 18th Advanced Course, Swiss Society of Astronomy and Astrophysics, Publication de l'Observatoire de Genève, 1988, p. 339.
- [36] Jefferies J.T., *Spectral Line Formation*, Blaisdell, Waltham, MA, 1968.
- [37] Mihalas D., *Stellar Atmospheres*, Freeman, San Francisco, 1978.
- [38] Oxenius J., *Kinetic theory of particles and photons, Theoretical Foundations of Non-LTE Plasma Spectroscopy*, Springer, Berlin, 1986.
- [39] Hummer D.G., Non-coherent scattering I. The redistribution function with Doppler broadening, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* 125 (1962) 21.
- [40] Omont A., Smith E.W., Cooper J., Redistribution of resonance radiation I. The effect of collisions, *Astrophys. J.* 175 (1972) 185.
- [41] Vardavas I.M., The scattering effects of the redistribution  $R_{\text{III}}$  on spectral line formation, *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer* 16 (1976) 715.
- [42] Frisch H., Non-LTE transfer V. The asymptotics of partial redistribution, *Astron. Astrophys.* 83 (1980) 166.
- [43] Adams T.F., Hummer D.G., Rybicki G.B., Numerical evaluation of the redistribution  $R_{\text{II-A}}$  and of the associated scattering integral, *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer* 11 (1971) 1365.
- [44] Gouttebroze P., Fast approximations for the  $R_{\text{II-A}}$  redistribution function, *Astron. Astrophys.* 160 (1986) 195.
- [45] Scharmer G.B., A linearization method for solving partial redistribution problems, *Astron. Astrophys.* 117 (1983) 83.
- [46] Auer L.H., Paletou F., Two-dimensional radiative transfer with partial frequency redistribution I. General method, *Astron. Astrophys.* 285 (1994) 675.
- [47] Hubeny I., Non-LTE line transfer with partial frequency redistribution II. An equivalent two-level atom approach, *Bull. Astron. Instit. Czech.* 36 (1985) 1.
- [48] Hubeny I., Lites B.W., Partial redistribution in multilevel atoms I. Method and application to the solar hydrogen line formation, *Astrophys. J.* 455 (1995) 376.
- [49] Paletou F., A note on improved computations of solar prominences: 2D radiative models, *Astron. Astrophys.* 311 (1996) 708.
- [50] Paletou F., On  $H\alpha$  source function vertical variations in filaments and bright rims visibility, *Astron. Astrophys.* 317 (1997) 244.
- [51] Hamilton D.R., The resonance radiation induced by elliptically polarized light, *Astrophys. J.* 106 (1947) 457.
- [52] Chandrasekhar S., *Radiative Transfer*, Oxford University Press, 1950.
- [53] Ivanov V.V., Generalized Rayleigh scattering I. Basic theory, *Astron. Astrophys.* 303 (1995) 609.
- [54] Ivanov V.V., Kasarov A.M., Loskutov V.M., Viik T., Generalized Rayleigh scattering II. Matrix source function, *Astron. Astrophys.* 303 (1995) 621.
- [55] Faurobert-Scholl M., Hanle effect with partial frequency redistribution I. Numerical methods and first applications, *Astron. Astrophys.* 246 (1991) 469.

- [56] Nagendra K.N., Frisch H., Faurobert-Scholl M., An operator perturbation method for polarized line transfer III. Applications to the Hanle effect in 1D media, *Astron. Astrophys.* 332 (1998) 610.
- [57] Faurobert-Scholl M., Diagnostics with the Hanle effect, *Solar Phys.* 164 (1996) 79.
- [58] Nagendra K.N., Paletou F., Frisch H., Faurobert-Scholl M., An operator perturbation method for polarized line transfer IV. Applications to the Hanle effect with partial frequency redistribution, in: Nagendra K.N., Stenflo J.O. (Eds.), *Solar Polarization, Proc. 2nd SPW*, Kluwer, Dordrecht, 1999, p. 127.
- [59] Kunasz P.B., Auer L.H., Short characteristic integration of radiative transfer problems: formal solution in two-dimensional slabs, *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer* 39 (1988) 67.
- [60] Auer L.H., Fabiani Bendicho P., Trujillo Bueno J., Multidimensional radiative transfer with multilevel atoms I. ALI method with preconditioning of the rate equations, *Astron. Astrophys.* 292 (1994) 599.
- [61] Fabiani Bendicho P., Trujillo Bueno J., Three-dimensional radiative transfer with multilevel atoms, in: Nagendra K.N., Stenflo J.O. (Eds.), *Solar Polarization, Proc. 2nd SPW*, Kluwer, Dordrecht, 1999, p. 219.
- [62] Paletou F., Bommier V., Faurobert M., Polarized radiation transfer in 2D geometry, in: Nagendra K.N., Stenflo J.O. (Eds.), *Solar Polarization, Proc. 2nd SPW*, Kluwer, Dordrecht, 1999, p. 189.
- [63] Manso Sainz R., Trujillo Bueno J., The Hanle effect in 1D, 2D and 3D, in: Nagendra K.N., Stenflo J.O. (Eds.), *Solar Polarization, Proc. 2nd SPW*, Kluwer, Dordrecht, 1999, p. 143.
- [64] Dittmann O., 3D polarized radiative transfer with weak magnetic fields, in: Nagendra K.N., Stenflo J.O. (Eds.), *Solar Polarization, Proc. 2nd SPW*, Kluwer, Dordrecht, 1999, p. 201.
- [65] Trujillo Bueno J., Fabiani Bendicho P., A novel iterative scheme for the very fast and accurate solution of non-LTE radiative transfer problems, *Astrophys. J.* 455 (1995) 646.